Tiesinė algebra

Paskaitų konspektas

Turinys

1. Algebrinės operacijos ir algebrinės struktūros

1.1. Aibės ir algebrinėmis operacijos jose

Pagrindiniai žymėjimai, kurie bus naudojami:

A – aibė, $a \in A$ – aibės elementas, $B \subset A$ – aibės poaibis, $\varnothing$ – tuščioji aibė, ji yra bet kurios aibės A poaibis: $\varnothing \subset A$.
Naudosime kiekybinius apibūdintojus, vadinamus kvantoriais:
$\forall$ – bendrumo kvantorius (visi, kiekvienas, bet kuris),
$\exists$ – egzistavimo kvantorius (egzistuoja, galima rasti, yra toks).
Aibės elementus išvardinsime riestiniuose skliausteliuose:
$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $A = \{\alpha, \beta\}$ – baigtinės n ir dviejų elementų aibės.
Natūraliųjų, sveikųjų, racionaliųjų, realiųjų skaičių aibes žymėsim šitaip:
$N \subset Z \subset Q \subset R$ –

Dviejų aibės elementų $x, y \in A$ operacija $(*)$ vadinama binariąja operacija: $z = x * y$;
Tarkime, $\forall x, y \in A \Rightarrow z = x * y \in A$ – sakysime, kad aibė A yra uždara operacijos $(*)$ atžvilgiu; čia $\Rightarrow$ žymi loginę du teiginius I

ir II siejančią jungtį, vadinamą implikacija; $I \Rightarrow II$ suprantamą kaip "jei I, tai II".
Aibę A su joje apibrėžta operacija $(*)$ vadinsime algebrine struktūra, ją žymėsime $(A, *)$: $(N, +)$, $(Z, -)$, $(Z, \cdot)$.

Pavyzdžiai

1. Dviejų elementų aibė
$A = \{\alpha, \beta\}$, operaciją $\oplus$ apibrėžiame šitaip:
$\alpha \oplus \alpha = \alpha$, $\alpha \oplus \beta = \beta$, $\beta \oplus \alpha = \beta$, $\beta \oplus \beta = \alpha$;
turime algebrinę struktūrą $(A, \oplus)$.

2. Sveikieji skaičiai
$\forall m, n \in Z$ apibrėžiame operaciją $\circ$:
$m \circ n = m - n + m \cdot n$, $1 \circ 2 = 1 - 2 + 1 \cdot 2 = 1$,
$2 \circ 3 = 2 - 3 + 2 \cdot 3 = 5$, $3 \circ 4 = 3 - 4 + 3 \cdot 4 = 11$;
Turime algebrinę struktūrą $(Z, \circ)$.

3. Kompleksiniai skaičiai $C = \{(x, y) : x \in R, y \in R\}$,
$z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$,
apibrėžiame jų sumą bei sandaugą:
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$;
turime algebrinę struktūrą su dviem apibrėžtomis operacijomis:
$(C, +, \cdot)$.
Tokiu būdu:
$(1, 2) \cdot (2, 3) = (1 \cdot 2 - 2 \cdot 3, 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2) = (2 - 6, 3 + 4) = (-4, 7)$.
Įprastas kompleksinio skaičiaus žymėjimas $(x, y) = x + i \cdot y = z$,
čia i - toks skaičius, kad $i^2 = -1$.

4. n-mačių vektorių erdvė R^n
$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_j \in R\}$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$,
vektorių suma: $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$.
Algebrinė struktūra $(R^n, +)$.

5. Antrosios eilės kvadratinės matricos

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$,
jų suma $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$,
sandauga $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$.
Pavyzdžiui,
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -2 \\ 43 & -4 \end{pmatrix}$.
Algebrinę struktūrą pažymėkime $(M_{2\times 2}, +, \cdot)$.

6. Vieno kintamojo daugianariai
$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,
kur $a_j \in R$, $a_n \neq 0$, vadinamas n-tojo laipsnio daugianariu. Daugianariai sudedami ir dauginami pagal algebros taisykles:
$A_n(x) + B_n(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$,
$A_n(x) \cdot B_m(x) = C_{n+m}(x) =$
$a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m)x^{n+m-1} + \cdots + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + a_0 b_0$.
n-tojo laipsnio daugianarių aibę pažymėkime P^n. Turime algebrinę struktūrą $P^n, +, \cdot$.

1.2. Pusgrupės

Apibrėžimai

Tarkime, kad turime algebrinę struktūrą $(A, *)$.
Operacija $(*)$ vadinsime *komutatyviąja*, kai $\forall x, y \in A$:

$$x * y = y * x$$

Operacija $(*)$ vadinsime *asociatyviąja*, kai $\forall x, y, z \in A$

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

Kai operacija $(*)$ asociatyvi, galime apibrėžti bet kurio aibės

A elemento x n-tąjį laipsnį:

$$x^n = \underbrace{x * x * \cdots * x}_{n \text{ kartų}}.$$

Kai operacija $(*)$, apibrėžta aibėje A, yra asociatyvi, algebrinę struktūrą $(A, *)$ vadinsime *pusgrupe*.

Pusgrupės elementą $e \in (A, *)$ vadinsime *neutraliuoju* tada ir tik tada, kai $\forall x \in A$

$$e * x = x * e = x$$

Teorema. Pusgrupė turi vienintelį neutralųjį elementą.
Įrodymas. $\Diamond$ Tarkime, kad pusgrupė turi kitą neutralųjį elementą e'. Pagal neutraliojo elemento apibrėžimą gauname

$$e * e' = e' * e = e$$

. Kita vertus,

$$e * e' = e' * e = e'$$

. Vadinasi, $e = e'$. $\blacklozenge$

Jei operacija $(*)$ vadinsime *sudėtimi*, ją dažniausiai žymėsime $(+)$, o neutralųjį pusgrupės $(A, +)$ elementą vadinsime *nuliniu* elementu arba tiesiog nuliu, 0. Sakysime, kad turime pusgrupę sudėties operacijos atžvilgiu.

Jei operaciją $(*)$ vadinsime *daugyba*, ją dažniausiai žymėsime $(\cdot)$, o neutralųjį pusgrupės daugybos atžvilgiu $(A, \cdot)$ elementą vadinsime jos *vienetiniu* elementu.

Sudėties ar *daugybos* operacijų pavadinimai dažniausiai parenkami, jei nagrinėjamuose pusgrupėse tos operacijos turi panašias savybes, kokias turi mums įprastos skaičių sudėties ir daugybos operacijos.

Pusgrupė $(A, \cdot)$, turinti neutralųjį elementą, vadinama *monoidu.* Jei operacija $(*)$ yra komutatyvioji, monoidas, taip pat ir pusgrupė, vadinami *komutatyviaisiais.*

Pavyzdžiai

1. $(\{0,1\},\oplus)$, čia $\oplus$ žymima taip vadinama *sudėtis moduliu du*:

$$\forall a,b \in Z a \oplus b = \langle (a+b) \div 2 \rangle$$

, kur $\langle\rangle$ žymi dalybos liekaną. Ši operacija $\oplus$ yra komutatyvi ir asociatyvi, nes įprastoji skaičių sudėtis yra komutatyvi ir asociatyvi, o suma moduliu 2 lygi nuliui jei įprastoji suma lyginė ir lygi vienetui priešingu atveju. Pusgrupės $(Z,\oplus)$: nulinis elementas yra nulis 0.

Operacija $\oplus$ aibėje $(\{0,1\}$ naudojama *matematinėje logikoje*:

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1,$$

vadinama *sudėtimi moduliu du* arba *i6imtinai arba.* **2.** Anksčiau aibėje Z apibrėžta operacija $\circ$, operacija $\circ$ nėra komutatyvioji:
$3 \circ 4 = 3 - 4 + 3 \cdot 4 = 11$, $4 - 3 + 4 \cdot 3 = 13$,
nei asociatyvioji:
$2 \circ (3 \circ 4) = 2 \circ (3 - 4 + 3 \cdot 4) = 2 \circ (11) = 2 - 11 + 22 = 13$,
$(2 \circ 3) \circ 4 = (2 - 3 + 2 \cdot 3) \circ 4 = (5) \circ 4 = 5 - 4 + 5 \cdot 4 = 21$.

Ankstesnio poskyrio **3** – **6** pavyzdžių operacijos yra asociatyvios ir komutatyvios, išskyrus **5** pavyzdyje apibrėžtą matricų daugybą, kuri nėra komutatyvi:
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.3. Grupės

Tarkime, kad $(A,*)$ yra pusgrupė, turinti neutralųjį elementą $e \in A$ (monoidas). Jos elementas $a^* \in (A,*)$ vadinamas *simetriniu* elementui $a \in (A,*)$, jei

$$a^* * a = a * a^* = e$$

Teorema. Simetrinis elementas yra vienintelis.
Įrodymas. $\Diamond$ Tarkime, kad yra kitas simetrinis elementas $a*'$. Tada $a^{*\prime} * a = e = a * a^{*\prime}$. Remdamiesi monoido asociatyvumu, gauname, kad
$a^{*\prime} = e * a^{*\prime} = (a^* * a) * a^{*\prime} = a^* * (a * a^{*\prime}) = a^* * e = a^*$.
Taigi $a*' = a*$ $\blacklozenge$.

Pastebėkime, kad $(a^*)^* = a$. Kai $(*)$ - sudėtis, simetrinis elementas paprastai vadinamas *priešingu*, o kai daugyba – *atvirkštiniu.*

Teorema.

$$(x * y)^* = y^* * x^*$$

Įrodymas $\Diamond$ Iš operacijos $(*)$ asociatyvumo:

$$(x * y) * (y^* * x^*) = (x * (y * y^*)) * x^* = (x * e) * x^* = x * x^* = e$$

. Panašiai gauname $(y^* * x^*) * (x * y) = e$ $\blacklozenge$.

Tarkime, kad $\tilde{A} \subset A$, o ne visi aibės A elementai turi priešingus elementus operacijos $(*)$ atžvilgiu. Jei visi poaibio $\tilde{A}$ elementai $x \in \tilde{A}$ turi simetrinius $x^* \in \tilde{A}$, tai $(\tilde{A}, *)$ yra monoidas.

Pavyzdžiai

1. Pusgrupėje $(N, +)$ neutraliojo (nulinio) elemento nėra: $0 \notin N$; nė vienas pusgrupės elementas neturi priešingo.
2. Pusgrupėje $(Z, +)$ priešingas elementas yra:
$z^- = -z : z + (-z) = (-z) + z = 0$.
3. Pusgrupė $(Z, \cdot)$ turi neutralųjį (vienetinį) elementą – skaičių $1 \in Z$; atvirkštinis $z \in (Z, +)$ elementas yra
$z^* = z^{-1} = \frac{1}{z}, z \neq 0$:
$z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1$.
4. Kompleksinių skaičių $z = (x, y) = x + i \cdot y$ aibė $(C, +, \cdot)$, kuri yra pusgrupė tiek sudėties, tiek daugybos atžvilgiu, turi abu neutraliuosius elementus: $(0, 0)$ ir $(1, 0)$. Kiekvienas kompleksinis skaičius turi priešingą (simetrinį sudėties atžvilgiu): $-z = (-x, -y)$, o nenulinis kompleksinis skaičius $z = (x, y)$, $(z \neq (0, 0)$ turi atvirkštinį (simetrinį sandaugos atžvilgiu) $z^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$: $z * z^{-1} =$

$z^{-1} * z = e = (1, 0)$.

5.Kvadratinių antros eilės matricų aibė $(M_{2\times 2}, \cdot)$ sandaugos atžvilgiu yra pusgrupė, turinti neutralųjį elementą – vienetinę matricą $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, o kiekvienas tos pusgrupės elementas $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, turintis nenulinį determinantą (tokią matricą vadiname neišsigimusia) $D = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, turi atvirkštinį elementą:

$A^{-1} = D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

Nesunku įsitikinti, kad $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Apibrėžimas. Monoidas $(A, *)$, kurio kiekvienas elementas $x \in (A, *)$ turi simetrinį elementą, $x^* \in A$, vadinamas *grupe.*

Vadinasi, grupę $(A, *)$ galima apibrėžti ir kaip algebrinę struktūrą su šiomis savybėmis:
(1) operacija $(*)$ asociatyvioji: $x * (y * z) = x * (y * z)$;
(2) egzistuoja neutralusis elementas: $\exists e \in A \; e * x = x * e = x$;
(3) kiekvienas elementas turi simetrinį: $\forall x \in A \exists x^* : x^* * x = x * x^* = e$.

Komutatyvioji grupė dar vadinama *Abelio grupe.*

Pavyzdžiai

5.$(Z, +)$, $(C, +)$ – komutatyvios (Abelio) grupės.
6.$(Z, \cdot)$, $(C, \cdot)$ – pusgrupės.

1.4. Baigtinės grupės

Tarkime, kad algebrinė struktūra $(A, *)$ yra grupė ir aibė A yra baigtinė: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Skaičius $n = |A|$ vadinamas *grupės eile.*

Ciklinės grupės

Tarkime, kad $(A, *)$ yra grupė. Kadangi $(*)$ yra asociatyvi operacija, kaip jau minėta anks2iau, galima apibrėžti elemento a laipsnį: $a^2 = a * a$, $a^3 = a * a^2 = a^2 * a$, $a^n = a^{n-1} * a = a * a^{n-1}$. Susitarkime, kad $a^1 = a$, $a^0 = e$, kur e - neutralusis grupės elementas. Apibrėžkime dar ir neigiamus elemento a laipsnius: $a^{-1} = a^*$ – simetrinis elementas, $a^{-2} = a^{-1} * a^{-1}$, $a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n$. Akivaizdu, kad algebrinė struktūra $(a, *) = (\{a^n, n \in Z\}, *)$ yra grupės $(A, *)$ dalis, pogrupis. Ją vadinsime *cikline* grupe, generuota elemento a.

Ciklinė grupė gali būti baigtinė arba begalinė. Jei grupė yra baigtinė, visi bet kurio elemento laipsniai negali būti skirtingi (priešingu atveju būtų be galo daug elementų). Todėl galima nurodyti tokį mažiausią natūralųjį skaičių d, kad $a^d = e$. Jis vadinamas baigtinės grupės *elemento a eile*, taip pat ir jos generuojančiojo elemento a eile.

Kėliniai

Baigtinės aibės $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ elementų abipus vienareikšmį atvaizdavimą į tos pačios aibės elementus vadinsime šios aibės elementų *kėliniu*:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}.$$

Minėtą abipus vienareikšmį atvaizdavimą vadinamas žodžiu *bijekcija.* Tą patį kėlinį galima perrašyti keliais būdais:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

okių būdų yra $n!$.
Apibrėžkime kėlinių binariąją operaciją $(*)$, kurią vadinsime kėlinių *kompozicija*:

$$a*b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Kėlinių kompozicija nėra komutatyvi:

$$f * g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$g * f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Šitokios kėlinių pusgrupės operacija, pavadinta kėlinių kompozicija, yra asociatyvi:

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Kėlinių pusgrupė turi neutralųjį elementą:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Kiekvienas pusgrupės kėlinys p turi simetrinį kompozicijos atžvilgiu kėlinį:

$$p^* = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}:$$

$$p \cdot p^* = p^* \cdot p = e.$$

Vadinasi, kėlinių aibė, papildyta kompozicijos operacija, yra nekomutatyvi grupė.

1.5. Žiedas ir laukas

Apibrėžimas. Tegul $A \neq \emptyset$. Algebrinę struktūrą $(A, +, \cdot)$ vadinsime *žiedu* tada ir tik tada, kai
1) $(A, +)$ yra komutatyvioji grupė;
2) $(A, \cdot)$ yra pusgrupis.

Kadangi algebrinė struktūra $(A, \cdot)$ yra tik pusgrupė, daugybos operacija $(\cdot)$ gali neturėti įprastos jai atvirkštinės operacijos – dalybos. Tarkime, kad $x \cdot y = 0$ ir $x \neq 0$, $y \neq 0$. Tada struktūros $(A, +, \cdot)$ elementai x, y vadinami *nulio dalikliais*. Jei $\forall x \neq 0 \ \exists x^{-1}$ $(x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e)$, tai žiedas neturi nulio daliklių.

Apibrėžimas Algebrinė struktūra $(A, +, \cdot)$ vadinama *kūnu*, kai $A \neq \emptyset$ ir
1) $(A, +)$ yra komutatyvioji grupė;
2) $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ yra grupė;
3) daugybos operacija yra *distributyvi* sudėties atžvilgiu: $\forall x, y, z \in A$
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

Komutatyvusis kūnas vadinamas *lauku.*

Pavyzdžiai

1. Realiųjų skaičių $0(R, +, \cdot)$ – kūnas sudėties ir daugybos operacijų atžvilgiu.
2. Tegul $x, y \in R$. Matricos $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ sudaro kūną matricų sudėties ir daugybos operacijų atžvilgiu.
3. Kompleksinių skaičių kūnas $(C, +, \cdot)$.
2-jo pavyzdžio matricas užrašius šitaip:
$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = x \cdot E + y \cdot M,$
nesunku įsitikinti, kad $M^2 = -E$. Vadinasi, galime sakyti, kad 2-jo ir 3-jo pavyzdžių kūnai tapatūs, o matricą M galime vadinti menamojo vieneto i viena iš galimų matricinių realizacijų.

2. Kompleksiniai skaičiai

2.1. Apibrėžimai ir žymėjimai

Kompleksinių skaičių kūnu vadinome algebrinę struktūrą $(C, +, \cdot)$, kur $C = \{(x, y),\ x, y \in R\}$, turinčią sudėties ir daugybos operacijas:
$z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, $z_1 + z_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$,
$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot x_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$.

Aibių A ir B *Dekarto sandauga* vadinama aibė
$A \times B = \ \{(a, b),\ a \in A,\ b \in B\}$.

Vadinasi, kompleksinių skaičių aibė C yra dviejų realiųjų skaičių aibių R Dekarto sandauga: $C = R \times R$.

Neutralusis sudėties atžvilgiu (nulinis) $(C, +, \cdot)$ elementas yra $0 = (0, 0)$:
: $z + 0 = (x + 0, y + 0) = (0 + x, 0 + y) = z$, $\forall z$.

Neutralusis sandaugos atžvilgiu (vienetinis) elementas $1 = (1, 0)$:
$z \cdot 1 = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (1 \cdot x - 0 \cdot y, 0 \cdot x + 1 \cdot y) = 1 \cdot z = z$, $\forall z$.

2.2. Kompleksinių skaičių algebrinis pavidalas

Išspręskime lygtį $z^2 = -1$ kompleksinių skaičių aibėje. Turime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = -1, \\ 2xy & = 0. \end{cases}$$

Kadangi $x, y \in R$, turi būti $x = 0$ arba $y = 0$. Pirmąją lygtį galima išspręsti, tik kai $x = 0$. Šiuo atveju $y = 1$ arba $y = -1$. Gauname du lygties sprendinius $(0, 1)$ ir $(0, -1)$.

Pažymėkime kompleksinį skaičių $(0, 1) = i$ ir vadinkime jį *me-*

namuoju vienetu. Pavadinimas kildinamas iš tapatybės

$$i^2 = -1$$

Pastebėję, kad $z = (x, y) = (x, 0)+(0, y) = (x, 0)+(0, 1)\cdot(y, 0)$, kompleksinį skaičių z galime užrašyti pavidalu

$$z = x + iy,$$

kurį vadinsime *algebriniu* kompleksinio skaičiaus pavidalu.

Pažymėkime $x = Rez$ ir vadinsime kompleksinio skaičiaus *realiąja* dalimi; $Imz = y$ – *menamąja* dalimi:

$$z = \ Rez \ + i \ Imz$$

Dabar kvadratinė lygtis $az^2 \ + \ bz \ + \ c = 0$ turi dvi šaknis kai jos diskriminantas $D = b^2 - 4ac$ yra neigiamas:

$$z = \frac{-b}{2a} \pm \ i\frac{\sqrt{D}}{2a}$$

2.3. Algebrinės operacijos su kompleksiniais skaičiais

Dviejų kompleksinių skaičių $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$,
sumą ir sandaugą apibrėžėme šitaip :
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$;

Užrašykime kompleksinių skaičių sumą ir sandaugą algebriniu pavidalu:
$z_2 = (x_2 + \ iy_2)$,$z_1 = (x_1 + \ iy_1)$,
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \ i(y_1 + y_2)$,
$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \ i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Dėsniai

Nesunku patikrinti, kad kompleksinių skaičių sudėties ir daugybos operacijos tenkina komutatyvumo, asociatyvumo ir distributyvumo dėsnius, kurie galioja ir realiesiems skaičiams.

Komutatyvumas:
$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
Asociatyvumas:
$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;
$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.
Distributyvumas:
$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Kompleksinių skaičių sumą ir sandaugą lengvai gausime, sudėję ir sudauginę algebrinius kompleksinių skaičių pavidalus.

Sudėkime:

$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + (iy_1 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Sudauginkime:

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 + iy_1) \cdot x_2 + (x_1 + iy_1) \cdot iy_2 = x_2 \cdot (x_1 + iy_1) + iy_2 \cdot (x_1 + iy_1) = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot iy_1 + iy_2 \cdot x_1 + iy_2 \cdot iy_1 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Kaip matome, teko pritaikyti visus išvardintus - komutatyvumo, asociatyvumo bei distributyvumo - dėsnius bei menamojo vieneto esminę savybę: $i^2 = -1$.

Atimtis ir dalyba

Apart dviejų algebrinių operacijų - sudėties ir daugybos, mums yra įprastos dar dvi aritmetinėmis vadinamos operacijos - atimtis ir dalyba. Algebrinėse struktūrose, turinčiose neutralius ir simetrinius elementus tiek sudėties, tiek daugybos atžvilgiu, jas lengva apibrėžti.

Pademonstruosime tai kompleksinių skaičių pavyzdžiu. Simetrinis elementui z sudėties atžvilgiu (priešingas) kompleksinių skaičių kūno elementas yra

$$-z = -x - i\,y = -x - i\,(-y)$$

. Atimties operaciją galime apibrėžti šitaip:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 + i\,y_1) + (-x_2 + i\,(-y_2)) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 - y_2).$$

Kompleksinių skaičių z_1 ir $z_2 \neq 0$ *dalmuo* $\frac{z_1}{z_2}$ yra toks kompleksinis skaičius $w = x + i\,y)$, kad $w \cdot z_2 = z_1$. Iš čia gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_2 x - y_2 y & = x_1, \\ y_2 x + x_2 y & = y_2. \end{cases}$$

Jos sprendinys

$$x = \frac{x_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2}; y = \frac{y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Taigi,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Atvirkštinis skaičiui $z = x + i\,y$ kompleksinis skaičius yra toks:

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{x^2 + y^2},$$

čia

$$\overline{z} = x - i\,y$$

ir yra vadinamas skaičiaus z *jungtiniu kompleksiniu skaičiumi.*

Akivaizdu, kad $z = x + i\,0 = x$ yra realusis skaičius, t.y.

$$R \subset C$$

Vadinasi, dažniausiai naudojamų skaičių aibes galime sutvarkyti šitaip:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

2.4. Kompleksinė ploštuma

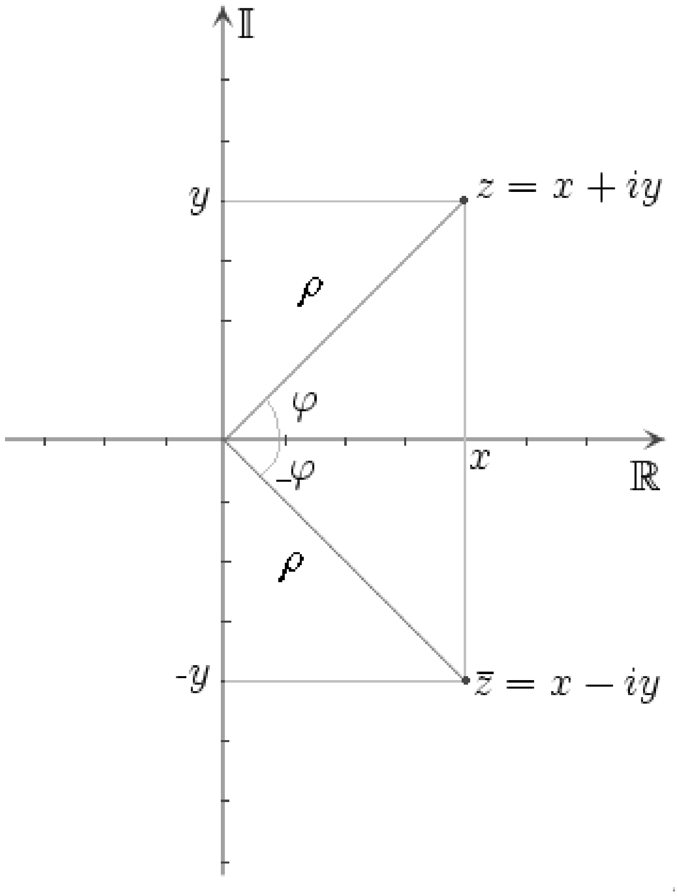
Kompleksinis skaičius $z = x + i\,y = (x,\ y)$ iš esmės yra apibūdinamas realiųjų skaičių pora $(x,\ y)$, su kuria esame įpratę tapatinti tašką plokštumoje, kurioje yra Dekarto koordinačių sistema. Tos ploštumos tašką su realiosiomis koordinatėmis $(x,\ y)$ prisikirkime kompleksiniam skaičiui $z = x + i\,y$, o pačią ploštumą pavadinkime *kompleksine ploštuma* ir pažymėkime $\mathbf{C}$. Nuo realiosos plokštumos ji skiriasi tuo, kad realiosios plok6tumos taško $(x,\ y)$ nevadiname kompleksinio skaičiaus $x + i\,y$ vardu. Kompleksinis (ir realusis) vienetas kompleksinėje plokštumoje turi koordinates $(1,\ 0)$, o menamasis vienetas - koordinates $(0,\ 1)$.

Apart Dekarto koordinačių $(x,\ y)$ plokštumoje plačiai naudojamos *polinės koordinatės* $(\rho,\ \varphi)$, kur $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, o φ – spindulio, jungiančio tašką $(x,\ y)$ su Dekarto koordinačių sistemos pradžios tašku, sudaromas kampas su Ox ašimi.

Kompleksinėje plokštumoje ρ vadinamas kompleksinio skaičiaus z *moduliu* ir žymimas $\rho = |z|$, o kampas φ – kompleksinio skaičiaus $z = (x, y) = x + iy$ *argumentu*. Pastarąjį galime rasti iš lygčių $\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$ arba

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|},\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|},$$

žr. 1 pav.



1 pav. Kompleksinio skaičiaus vaizdavimas ploštumoje

Nesunku suprasti, kad

$$\arg \overline{z} = -\arg z, |\overline{z}| = |z|, \overline{\overline{z}} = z$$

.

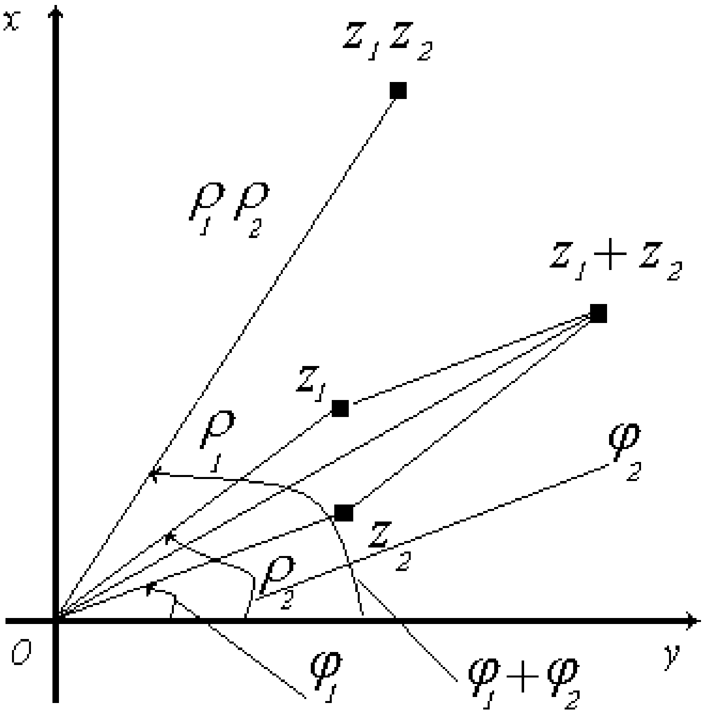
2.5. Trigonometrinis kompleksinio skaičiaus pavidalas

Kadangi $x = \rho\ cos\varphi$, $y = \rho\ sin\varphi$, kompleksinio skaičiaus z algebrinį pavidalą $z = x + iy$ nesunku pertvarkyti į *trigonometrinį* pavidalą:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Kompleksinio skaičiaus *argumentą* φ randame nevienareikšmiškai: jo reikšmės gali skirtis dydžiu $2\pi k$, $k \in Z$. Sutarkime žymėti

arg ją
pag y-
mėl



2 pav. Sudėties ir daugybos geometrinė prasmė

Sudauginkime du kompleksinius skaičius, išreikštus trigonometriniu pavidalu (žr. 2 pav.):

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)) \cdot (\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)) =$$
$$\rho_1\rho_2\left((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right) =$$
$$\rho_1\rho_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right).$$

Kaip matome, trigonometrinis pavidalas patogus dauginant kompleksinius skaičius: dauginamųjų moduliai sudauginami, o argumentai sudedami. Kadangi

$$\arg\overline{z} = -\arg z, |\overline{z}| = |z|, z \cdot \overline{z} = |z|^2,$$

gauname

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z}_2} = |z|^{-2}(\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)) \cdot (\rho_2(\cos -\varphi_2 + i\sin -\varphi_2)) =$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right).$$

Taigi, dalindami du skaičius trigonometriniu pavidalu, jų modulis daliname, o argumentus atimame.

2.6. Rodiklinis kompleksinio skaičiaus pavidalas

Kompleksinio kintamojo funkcijų teorijoje realiojo argumento funkcijos $f(x)$, apibrėžtos kompleksinės plokštumos realiojoje Ox ašyje arba jos dalyje, pratęsiamos į visą plokštumą, prisilaikant tokių principų: kompleksinio kintamojo funkcija $f(z)$ privalo išlaikyti senosios funkcijos $f(x)$ savybes, o, kai $z = x$, (t.y., $y = Rez = 0$), jų reikšmės turi sutapti: $f(z) = f(x)$.

Rodiklinė funkcija e^x, prisilaikant tokių principų, pratęsiama šitaip:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cos\varphi + isin\varphi)$$

Jei taip,

$$\cos y + i\sin y = e^{iy}$$

. Tada kompleksinį skaičių galime užrašyti dar ir *rodikliniu* pavidalu:

$$z = (x, y) = x + iy = |z|(\cos\arg z + i\sin\arg z) = |z|e^{i\arg z} = \rho e^{i\varphi}$$

Jungtinis kompleksinis skaičius užrašomas šitaip: $\overline{z} = \rho e^{-i\varphi}$, o trigonometriniu pavidalu gautosios kompleksinių skaičių daugybos ir dalybos taisyklės išplaukia iš rodiklinės funkcijos savybių:

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

2.7. Kompleksinio skaičiaus laipsnis

Tiek trigonometriniu, tieki rodikliniu pavidalais, padauginę kompleksinį skaičių z iš jo paties $n-1$ kartų, kur $n \in N$, gauname Muavro[1] formulę

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \rho^n e^{in\varphi}.$$

Pastebėkime, kad

$$(e^{i\varphi})^{-1} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = e^{-i\varphi},$$

vadinasi, Muavro formulė galioja visiems $n \in Z$.

Taikydami Muavro bei Niutono[2] dvinario[3] (binomo) formules, galime gauti daugelio trigonometrinių tapatybių įrodymus. Pavyzdžiui,

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 &= \\ \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi &= \\ \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.\end{aligned}$$

Paskutiniojoje lygybėje realiosios ir menamosios dalys turi būti lygios, gauname:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

,

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

.

[1] Abraham de Moivre (1667 - 1754), prancūzų matematikas

[2] Isaac Newton (1642 - 1727), anglų fizikas, matematikas, astronomas, filosofas, alchemikas, teologas

[3] $(a+ib)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}(ib) + C_n^2 (bi)^2 + \cdots + C_n^k a^k (ib)^{n-k} + \cdots + (ib)^n$, kur $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Šaknis iš kompleksinio skaičiaus

Apibrėžkime n-tojo laipsnio šaknį iš kompleksinio skaičiaus, $n \in N$
$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kaip lygties

$$w^n = z$$

sprendinį.

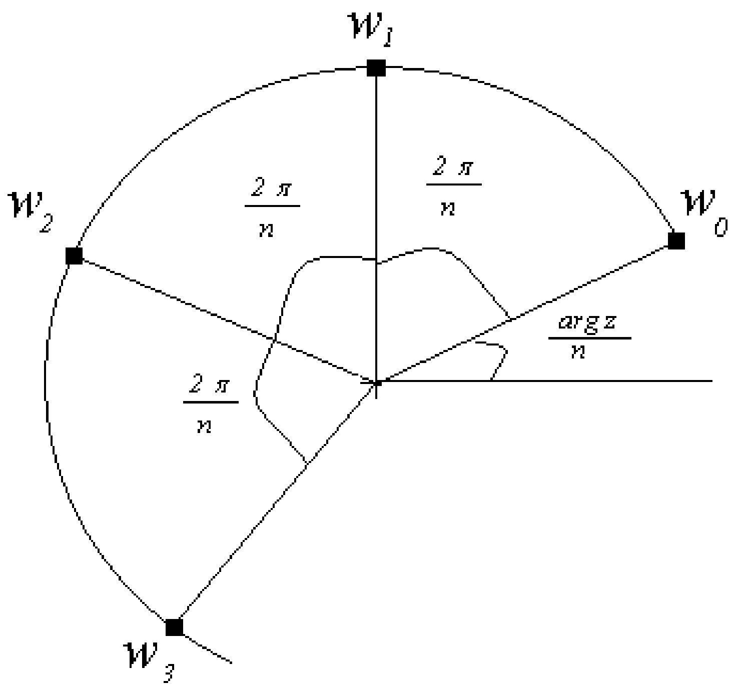
Pažymėkime $|w| = r$, $\psi = \arg w$. Tada $w^n = r^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, arba $r^n = \rho$ ir $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k \in Z$. Iš čia gauname, kad

$$r = \sqrt[n]{\rho},\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-2.$$

Vadinasi, yra lygiai n skirtingų n-ojo laipsnio šaknies reikšmių $w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}$:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2\pi k}{n}},$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

nes, kai $k = n$, dėl trigonometrinių funkcijų periodiškumo gauname tą pačią reikšmę, kaip ir tada, kai $k = 0$. Visos šios n-ojo laipsnio šaknies $\sqrt[n]{z}$ yra taisyklingojo n-kampio, įbrėžto į spindulio $\sqrt[n]{|z|}$ apskritimą su centru koordinačių pradžioje, viršūnės (žr. 4 pav.).



3 pav. Šaknies reikšmės

3. Matricos

3.1. Pagrindinės sąvokos

Matrica vadinsime stačiakampę lentelę

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n} = \|a_{ij}\|_{m\times n},$$

čia m – eilučių skaičius, n – stulpelių skaičius, a_{ij} – matricos elementas, i, j – elemento indeksai. Sakoma, kad matrica $m \times n$ – matė.

Vėliau kalbėsime apie matricų sumos ir sandaugos operacijas, todėl dažniausiai naudojamų matricų elementai - algebrinių struktūrų, pavyzdžiui, $R, +, \cdot$ elementai:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

čia $m = 3$, $n = 4$, o, pavyzdžiui, $a_{34} = 1$.

Praverčia ir matricos, kurių elementai kad ir diferencijavimo simboliai arba funkcijos; tokių pavyzdžiai yra n kintamųjų funkcijos $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ gradientas $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ ir *nabla operatorius*[4] $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$, šios matricos $n \times 1$-matės.

$n \times 1$ – matės ir $1 \times m$ – matės matricos taipogi vadinamos *vektoriais.* 1×1 – matė matrica $((a_{11})$ turi vienintelį elementą a_{11}.

Transponuotąja matrica vadinsime matricą, kurios kiekvienos eilutės elementai yra ankstesniosios (kurią transponuojame) matricos stulpelių elementai:

$$(a_{ij})^T{}_{m \times n} = (a_{ji})_{m \times n}$$

Akivaizdu, kad

$$(A^T)^T = A$$

Pavyzdžiai

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

2. $(a_1\ a_2 \cdots a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$

[4]Nabla operatorius yra diferencialinis operatorius, naudojamas fizikoje, apskaičiuojant gradientą, divergencija, rotorių

Šitokią transponuojamąją matricą vadiname *matrica-eilute*, o transponuotąją – *matrica-stulpeliu.*

Kvadratine matrica vadiname $n \times n$ – matę matricą:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

Jos elementai $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ vadinami kvadratinės matricos *pagrindinės įstrižainės* ellementais, o $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ – šalutinės įstrižainės) elementais.

Kvadratinė matrica A vadinama *simetrine matrica* tada ir tik tada, kai

$$A^T \;=\; A$$

. *Antisimetrinė matrica* atpažįstama iš jos esminės savybės

$$A^T \;=\; -\,A$$

. **Pavyzdžiai**

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ – simetrinė matrica;

2. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

– antisimetrinė matrica, viena iš daugelio menamojo vieneto iš kompleksinių skaičių kūno galimų išraiškų matricomis.

3.2. Algebrinės matricų operacijos

Matricų sudėtis

Dviejų vienmačių matricų *suma* vadiname to paties matavimo matricą, kurios kiekvienas elementas lygus atitinkamų sudedamų matricų elementų sumai:

$$(c_{ij})_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

Trumpai užrašome šitaip:

$$C = A + B$$

Pavyzdžiui,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix}$$

– kompleksinio skaičiaus matricinis atitikmuo, užrašytas kaip simetrinės ir antisimetrinės matricų suma. Matricų sudėčiai galioja mums įprasti skaičių sudėties dėsniai:

komutatyvumo

$$A + B = B + A$$

asociatyvumo

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

. Vadinasi, to paties matavimo matricos sudaro pusgrupę jų sudėties operacijos atžvilgiu, komutatyvią. Toji $m\times n$ – mačių matricų pusgrupė $(A_{m\times n}, +)$ turi neutralųjį (nulinį) elementą, kuris vadinamas |textitnuline matrica – tai matrica, kurios visi elementai nuliniai:

$$\mathbf{O}_{m\times n} = (0)_{m\times n}$$

.
Kad tokia matrica yra nulinis matricų pusgrupės elementas, seka iš matricų sumos apibrėžimo:

$$A + \mathbf{O} = (a_{ij} + 0)_{m\times n} = (0 + a_{ij})_{m\times n} = \mathbf{O} + A = A, \ \forall A$$

.

Matricos daugyba iš skaliaro

Skaliaru vadinamas dydis (galbūt kintamas, t.y., funkcija), kuriam išreikšti pakanka vieno algebrinės struktūros $(A, +, \cdot)$ elemento. Dažniausiai skaliarais vadinsim realiuosius skaičius $a \in (R, +, \cdot)$.

Tegul λ – skaliaras. Matricą A dauginame iš skaliaro padaugindami iš jo kiekvieną matricos elementą:

$$\lambda \cdot A = ||\lambda a_{ij}||_{m \times n}$$

. Pavyzdziui:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Matricų daugybai iš skaliaro galioja įprasti skaičių daugybos dėsniai:
komutatyvumas $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$;
asociatyvumas $\lambda \cdot (\mu A) = (\lambda\mu) \cdot A$;
distributyvumas:
1) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
Padauginę matricą A iš -1, gauname priešingą matricai A elementą matricų sumos atžvilgiu $-A$, vadinasi, matricų sudėties atžvilgiu $(A_{m\times n}, +)$-čių matricų algebrinis darinys $(A_{m\times n}, +)$ yra *grupė*.

Matricų atimties operacija tokiose grupėse apibrėžiama įprastu būdu: $A \; - \; B = \; A + (-B)$.

Matricų daugyba

Matricas $A_{m\times n}$ ir $B_{n\times k}$ vadiname *suderintomis*: pirmosios kiekviena eilutė, o antrosios kiekvienas stulpelis turi po vienodą elementų skaičių, lygų n.

Jei matricos $A_{m\times n}$ ir $B_{r\times k}$ *nesuderintos* ($n \neq r$), sakoma, kad matricų *sandauga neegzistuoja.* Suderintų *matricų sandauga* apibrėžiama šitaip:

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = \; C_{m\times k} = (c_{ij})_{m\times k},$$

kur

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Sandaugos C elementą c_{ij} gauname sudauginę kairiosios matricos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \cdots & \mathbf{a_{in}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i-tosios eilutės ir dešiniosios matricos

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \mathbf{b_{1j}} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & \mathbf{b_{ij}} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & \mathbf{b_{mj}} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

j-tojo stulpelio atitinkamus elementus ir sandaugas sudėję.

Pavyzdžiai.

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 8 + 2\cdot 10 + 3\cdot 7 & 1\cdot 9 + 2\cdot 11 + 3\cdot 14 \\ 4\cdot 8 + 5\cdot 10 + 6\cdot 7 & 4\cdot 9 + 5\cdot 11 + 6\cdot 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 73 \\ 124 & 175 \end{pmatrix}$$

Šis pavyzdys įrodo, kad matricų *daugyba nekomutatyvi* $A \cdot B \neq B \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\cdot 1+9\cdot 4 & 8\cdot 2+9\cdot 5 & 8\cdot 3+9\cdot 6 \\ 10\cdot 1+11\cdot 4 & 10\cdot 2+11\cdot 5 & 10\cdot 3+11\cdot 6 \\ 7\cdot 1+14\cdot 4 & 7\cdot 2+14\cdot 5 & 7\cdot 3+14\cdot 6 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 44 & 61 & 78 \\ 54 & 75 & 96 \\ 63 & 140 & 105 \end{pmatrix}$$

Kaip matome, matricų sandaugos, sukeitus dauginamuosius vietomis, yra skirtingų matavimų matricos.

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Šių matricų abi sandaugos $A \cdot B$ ir $B \cdot A$ egzistuoja ir yra vienodų matavimų, bet nesutampančios, nevienodos matricos.

3. Matricos $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ kurios yra vienos iš daugelio kompleksinių skaičių $z = x + iy$ matricinių išraiškų, yra tarpusavyje komutatyvios sandaugos atžvilgiu, kaip ir kompleksiniai skaičiai.

Jei $A \cdot B = B \cdot A$, matricos A ir B vadinamos *komutuojančiomis.*

Neutralusis sandaugos operacijos atžvilgiu elementas vadinamas – *vienetinė matrica*

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, E_n = (e_{ij})_{n\times n},$$

kur $e_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kai } i = j, \\ 0, & \text{kai } i \neq j, \end{cases}$

δ_{ij} vadinamas *Kronekerio simboliu.* [5]

Kokią matricą bedaugintume iš vienetinės matricos, sandauga lygi tai matricai:

$$A_{m\times n} \cdot E_n = A_{m\times n},\ E_n \cdot B_{n\times k} = B_{n\times k},\ \forall A_{m\times n}, \forall\ B_{n\times k}$$

[5]Leopold Kronecker (1823 - 1891) - vokiečių matematikas, žinomas ir savo posakiu" Dievas sukūrė sveikuosius skaičius, kitką padarė žmonės".

Matricų daugybos dėsniai pažįstami iš skaičių daugybos: asociatyvumas:
$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
distributyvumas:
1) $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
2) $A \cdot (B + C) = AB + AC$.

Du distributyvumo dėsnius teko užrašyti todėl, kad matricų daugybai komutatyvumo dėsnis negalioja.

Kvadratinei matricai $A = \ A_{n\times n}$ galima apibrėžti matricos k-tąjį laipsnį, $k \in N$:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k-\text{kartų}}$$

Sandaugos transponuotoji matrica lygi transponuotųjų matricų sandaugai, dauginant priešinga tvarka:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

4. Determinantai

4.1. Determinanto sąvoka

Determinantas yra tam tikras skaliarinis, siejamas su kvadratine matrica $A_n \times n = \ A_n = \ A$, n vadinamas matricos eile. Determinantą žymine $detA$, $det(A)$, $|A|$. Jį apskaičiuosime algebrinių operacijų su matricos elementais pagalba, nors yra ir kitokių determinanto radimo būdų. Tiesinėje algebroje determinanto sąvoka plačiai naudojama, pavyzdžiui, sprendžiant tiesinių lygčių sistemas, kurių matricų determinantai nelygūs nuliui.

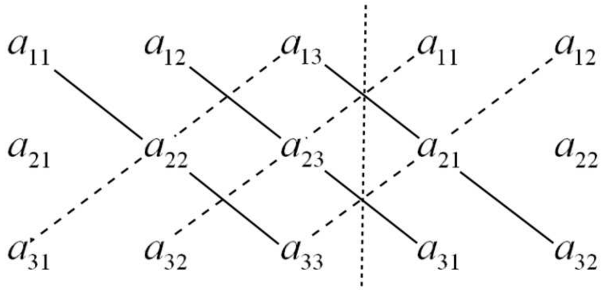
Antrosios eilės determinantas lygus matricos pagrindinės ir šalutinės įstrižainių elementų sandaugų skirtumui:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

Trečiosios eilės determinantas

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$



4 pav. Trečiosios eilės determinanto skaičiavimo taisyklė

Pavyzdys

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} =$$
$$1 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 7 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \cdot 6 - 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 0 \cdot 8 - 1 \cdot 7 \cdot 6 =$$
$$32 + 70 + 0 - 60 - 0 - 42 = 0.$$

Matrica, kurios determinantas lygus nuliui, vadinama *išsigimusia*.

4.2. Determinanto apibrėžimas

Nesunku pastebėti, kad antros (trečios) eilės determinantus apskaičiuojame sudėdami visas įmanomas dviejų (trijų) matricos elementų, esančių skirtingose eilutėse ir skirtinguose stulpeliuose, sandaugas, tik pusę tų sandaugų sudėdami padauginame iš (-1). Beliko išsiaiškinti, kurias.

Kėliniu vadinome aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$ *bijekcija* f (abipus vienareikšmį atvaizdavimą) į ją pačią:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

Čia $i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tą patį kėlinį f galima užrašyti $n!$ skirtingais būdais, sukeitus vietomis lentelės stulpelius, pavyzdžiui,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

bet šįsyk mums svarbiausia yra kėlinio *standartinė išraiška*, kai pirmojoje eilutėje yra skaičiai išrikiuoti didėjimo tvarka: $(1, 2, \ldots, n)$. Tada kėlinį galime užrašyti dar paprasčiau: $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$.

Sakome, kad skaičiai i_j ir i_{j+1} sudaro vieną kėlinio $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ *netvarką (inversiją)*, jei $i_j > i_{j+1}$.

Pavyzdžiui, kėlinio $(1, 2, 3, 5, 4)$ inversiją sudaro skaičiai 5 ir 4. Kitų inversijų šis kėlinys neturi. Kėlinys $(1, 3, 5, 2, 4)$ turi tris inversijas: (3,2), (5,2), (5,4). Netvarkas paprasta suskaičiuoti, skaičiuojant, kiek kartų gretimus kėlinio skaičius reikia sukeisti vietomis norint kėlinio skaičius išrikiuoti didėjimo tvarka. Kėlinyje $(1, 3, 5, 2, 4)$ dvejetą sukeitus vietomis su penketu, po to su trejetu (dvi netvarkos), beliks penketą sukeisti su ketvertu (iš viso - trys netvarkos).

Kėlinys, turintis lyginį netvarkų skaičių, vadinamas *lyginiu*, o nelyginį – (*nelyginiu kėliniu*).

Sutarkime, kad matricos elementus aukščiau minėtose sandaugose išrikiuosime taip, kad pirmieji indeksai sudarys standartinį kėlinį, t.y., bus išrikiuoti jų didėjimo tvarka (dauginamuosius sukeisti vietomis galime dėl daugybos komutatyvumo).

Apibrėžimas. n-tosios eilės kvadratinės matricos $A = (a_{ij})_{n\times n}$ determinantu vadinamas skaičius

$$\det A \; = \; |A| \; = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

čia sudėtos visos įmanomos matricos n elementų, esančių skirtingose eilutėse ir skirtinguose stulpeliuose sandaugos $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$, vadinamos *determinanto nariais*, o $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ žymi kėlinio $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, sudaryto iš tokio determinanto nario elementų antrųjų indeksų, netvarkų skaičių.

Nesunku patikrinti, kad ankstesnės 2-os ir 3-ios eilės determinantų skaičiavimo taisyklės atitinka šį apibrėžimą. Kai $n = 1$, t.y., kai matrica $(a_1 1)$ turi tik vieną elementą, o jos determinantas - tik vieną narį $a_1 1$, matome, kad to nario "antrųjų indeksų kėlinys" (1) neturi netvarkų, todėl tokios matricos determinantas $\det(a_{11}) = (-1)^0 a_{11} = a_{11}$.

Ketvirtosios eilės determinantas

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

turi $4! = 24$ narius; pavyzdžiui, determinanto narys $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$ sudedamas nekeičiant jo ženklo, nes $(-1)^{I(3,4,1,2)} = (-1)^4 = 1$.

Suprantama, kad didesnių eilių determinantus skaičiuoti tiesiogiai pagal determinanto apibrėžimą būtų labai sunku ar netgi neįmanoma.[6].

4.3. Determinantų savybės

[6]Operacijų skaičiaus augimas, sulyginamas su faktorialo $n!$ augimu didėjant n, yra nepaprastai spartus ir vadinamas *kombinatoriniu sprogimu*

1. Transponuojant matricą jos determinantas nesikeičia:

$$\det A^T = \det A$$

. $\Diamond$ Ištiės, pagal determinanto apibrėžimą, apskaičiuojant transponuotosios matricos determinantą sudedamos tos pačios elementų, esančių skirtingose matricos eilutėse ir stulpeliuose, sandaugos, kaip ir apskaičiuojant pradinės matricos determinantą, tik visų elementų indeksai susikeičia vietomius. Kiekvieno determinanto nario ženklas lieka tas pats, nes minėtų sandaugų elementų indeksų kėlinių netvarkų skaičius nesikeičia.$\blacklozenge$

2. Determinanto savybės, galiojančios eilutėms, galioja ir stulpeliams.

$\Diamond$ Teiginys yra pirmosios determinantų savybės išvada.$\blacklozenge$

3. Dvi determinanto eilutes (stulpelius) sukeitus vietomis, determinantas keičia ženklą.

$\Diamond$ Išties, pagal determinanto apibrėžimą, pakinta tik kiekvieno determinanto nario iš antrųjų to nario elementų sudarytas kėlinys - jame atsiranda (arba pradingsta) viena netvarka. Jei tas kėlinys buvo lyginis, jis tampa nelyginiu, ir atvirkščiai. Vadinasi, kiekvieno determinanto ženklas virsta priešingu, taigi, determinantas keičia ženklą.$\blacklozenge$

4. Determinantas, turintis dvi vienodas eilutes (stulpelius), lygus nuliui.

$\Diamond$ Kadangi sukeitėm eilutes vietomis, $|A| = -|A|$. Iš kitos pusės, $|A| = |A|$, kadangi vietomis sukeitėm nulines eilutes. Vadinasi, $|A| = 0$.$\blacklozenge$

5. Visus vienos determinanto eilutės (stulpelio) elementus padauginę iš skaliaro λ, determinanto reikšmę padauginsime iš λ.

$\Diamond$ Įrodykime teiginį eilutėms. Padauginę visus j-tosios determinanto eilutės elementus iš λ, kiekvienas determinanto narys $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ji_j}\cdots a_{ni_n}$ padauginamas iš λ:

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots \lambda a_{ji_j}\cdots a_{ni_n} \;=\; \lambda(a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ji_j}\cdots a_{ni_n})$$

Vadinasi,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{j1} & \lambda a_{j2} & \dots & \lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

pakinta tik kiekvieno determinanto nario iš antrųjų to nario elementų sudarytas kėlinys - jame atsiranda (arba pradingsta) viena netvarka. Jei tas kėlinys buvo lyginis, jis tampa nelyginiu, ir atvirkščiai. Vadinasi, kiekvieno determinanto ženklas virsta priešingu, taigi, determinantas keičia ženklą.$\blacklozenge$

6. Determinantas, turintis dvi proporcingas eilutes, lygus nuliui.

$\lozenge$ Teiginys yra pastarųjų dviejų determinanto savybių išvada.$\blacklozenge$

7. Jei determinanto kurios nors vienos eilutės (stulpelio) elementai yra dvieju dėmenų sumos, tai determinantas lygus sumai dvieju determinantų, kuriu viename minėtąją eilutę (stulpelį) sudaro pirmieji demenys, kitame - antrieji dėmenys, o likusios eilutės (stulpeliai) sutampa su pradinio determinanto eilutėmis (stulpeliais).

$\lozenge$ Tarkime, visi j-sios eilutės elementai yra tokios sumos:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} + a'_{j1} & a_{j2} + a'_{j2} & \dots & a_{jn} + a'_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Kiekvienas tokio determinanto narys yra dviejų kitų determinanto narių suma:

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots (a_{ji_j} + a'_{ji_j}) \cdots a_{ni_n} = a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ji_j} \cdots a_{ni_n} + a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a'_{ji_j} \cdots a_{ni_n}$$

Vadinasi,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{j1} & a'_{j2} & \dots & a'_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \blacklozenge$$

8. Determinantas nesikeičia, jei prie vienos jo eilutės (stulpelio) pridedama kita jo eilutė (stulpelis), padauginta(s) iš bet kokio skaliaro.

$\lozenge$ Pagal ankstesniąją savybę, gautasis determinantas yra dviejų determinantų suma, pirmasis lygus pradiniam determinantui, o antrojo dvi eilutės proporcingos, todėl, pagal šeštąją savybę, jis lygus nuliui.$\blacklozenge$

4.4. Determinanto elementų minorai ir adjunktai

n-sios eilės kvadratinės matricos $A_n = A = (a_{ij})$ (arba determinanto $|a_{ij}|$) elemento a_{ij} *minoru* M_{ij} vadinamas $(n-1)$-sios eilės determinantas, gaunamas iš matricos A pašalinus visus i-sios eilutės bei j-jo stulpelio elementus:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Elemento a_{ij} *adjunktu* A_{ij} vadinamas minoras, tik tuo atveju, kai elemento a_{ij} indeksų suma nelyginė, jo ženklas keičiamas priešingu:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Pavyzdžiai

1. Matricos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ elemento, lygaus 4, minoras yra

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6,$$

o elemento, lygaus 5 -

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12$$

2. Pirmojo pavyzdžio elementų adjunktai $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = 6$, o $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = -12$.

3. Matricos $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ adjunktas $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3$.

Pastaba. Matricų teorijoje naudojama ir kitokia minoro samprata. Nebūtinai kvadratinės matricos $A_{m \times n} = (a_{ij})$ *k-tosios eilės minoru* vadinamas k-tosios eilės determinantas, sudarytas iš matricos elementų, esančių kurių nors k matricos eilučių ir k stulpelių sankirtoje:

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

, čia, suprantama, $k \leq m$ ir $k \leq n$. Šiuos minorus naudosime vėliau, jie nesiejami su kuriuo nors matricos elementu.

4.5. Determinantų skaičiavimas

Suprantama, tiesiogiai pagal determinanto apibrėžimą apskaičiuoti aukštesnių eilių determinantų reikšmes pernelyg sudėtinga.

Teorema. Determinantas lygus bet kurios jos eilutės (stulpelio) visų elementų ir jų adjunktų sandaugų sumai:

$$detA_n = |a_{ij}|_{n\times n} = \sum_{i=0}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Tokia determinanto išraiška vadinama *determinanto skleidiniu eilute (stulpeliu)*.

$\Diamond$ Tarkime, kad patį determinantą ir minorus skaičiuojame pagal determinanto apibrėžimą (minorai juk yra vienetu žemesnės eilės determinantai). Kad determinanto skleidinyje bet kuria eilute (stulpeliu) yra visi determinanto nariai (jo n elementų, esančių skirtingose eilutėse ir stulpeliuose, sandaugos), akivaizdu. Kad daugiklis $(-1)^{i+j}$, iškurio dauginame kiekvieną minorą M_{ij} apskaičiuodami adjunktą A_{ij}, garantuoja, kad visos sandaugos determinanto skleidinyje bet kuria eilute (stulpeliu) yra to paties ženklo, kaip determinanto nariai, įrodykite patys.$\blacklozenge$

Prisiminkime aštuntąją determinanto savybę: jei prie vienos jo eilutės (stulpelio) pridedama kita jo eilutė (stulpelis), padauginta(s) iš bet kokio skaliaro, determinanto reikšmė nesikeičia.

Vadinasi, jei tokių determinanto pertvarkių, vadinamų jo *elementariaisiais pertvarkiais*, pagalba determinanto eilutėje (stulpelyje) gausime daug nulinių elementų, jo skleidinį minėtos eilutės (stulpelio) elementais apskaičiuoti bus nesunku.

Pavyzdžiai

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -10 + 22 - 8 = 4$$

2. Pridėkime prie determinanto antrosios eilutės pirmąją eilutę, padaugintą iš -2 ir išskleiskime gautąjį determinantą antrąja eilute:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1(6-10) = 4$$

4.6. Atvirkštinė matrica

Atvirkštine kvadratinei matricai A vadiname tokią matricą , kai

$$A \cdot B = B \cdot A = E$$

Ją žymėsime $B = A^{-1}$, kitas paplitęs jos žymėjimas I.

Teorema. Kvadratinė matrica gali turėti tik vieną atvirkštinę matricą.
$\Diamond$ Tarkime, kad A' yra kita atvirkštinė matrica. Tada
$A' = A'E = A'(AA^{-1}) = (A'A)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}$. $\blacklozenge$

Lema. Jei determinanto skleidimo formulėje pakeistume toje formulėje įrašytosios eilutės (stulpelio) elementus kitos eilutės (stulpelio) elementais, gautoji suma būtų lygi nuliui:

$$|a_{ij}|_{n\times n} = \sum_{i=0}^{n} a_{ik} \cdot A_{ij} = \sum_{j=0}^{n} a_{rj} \cdot A_{ij} = 0/\ k \neq j,\ r \neq i$$

$\Diamond$ Tarkime, eina kalba apie determinanto

$$|A|_{j\leftarrow k} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1k} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2k} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nk} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

kuriame vietoje j-tojo stulpelio elementų įrašyti k-tojo stulpelio elementai, skleidinį j-tuoju stulpeliu:

$$|A|_{j\leftarrow k} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ij}$$

Šis determinantas turi du vienodus stulpelius ir todėl pagal ketvirtąją determinantų savybę jo reikšmė lygi nuliui:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0,\ \ j \neq k.$$

$\blacklozenge$

Teorema. Neišsigimusi kvadratinė matrica A ($\det A = |A| \neq 0$) turi atvirkštinę matricą ir ji lygi transponuotajai matricos A elementų adjunktų matricai, padaugintai iš skaliaro, atvirkščio matricos determinantui:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Diamond$ Padauginę transponuotąją adjunktų matricą iš matricos A iš kairės arba iš dešinės, pagrindinėje jos įstrižainėje gautume dydžius, lygius $detA$, išskleistam atitinkamos eilutės (stulpelio) elementais, o kiti matricų sandaugos elementai lygūs nuliui, nes lygūs vienos matricos A eilutės (stulpelio) elementų ir kitos eilutės (stulpelio) elementų adjunktų sandaugų sumai, kuri, pagal įrodytąją lemą, lygi nuliui. Padauginę sandaugą iš skaliaro $\frac{1}{|A|}$, gauname vienetinę matricą E. ⧫

Teorema. $\det(AB) = \det A \det B$.
Šią teoremą pateikiame be įrodymo.

Išvada. Jei $\det A = 0$, atvirkštinė matrica A^{-1} neegzistuoja.

♢ Kadangi $detE$=1, priešingu atveju iš atvirkštinės matricos apibrėžimo $A^{-1} \cdot A = E$, įrodytosios teoremos ir prielaidos $\det A = 0$ gautume prieštarą: $1 = \det E = \det A \det A^{-1} = 0$. ⧫

Pavyzdys.
Raskime matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

atvirkštinę matricą.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \; A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \; A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \; A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, detA = 1.$

Vadinasi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Tiesinių lygčių sistemos

Apibrėžimas. Funkciją $f(X)$ vadiname *tiesine funkcija* tada ir tik tada, kai ji tenkina dvi savybes:

$$f(X_1 + X_2) = f(X_1) + f(X_2), \;\; f(cX) = cf(X),$$

$\forall X, X_1, X_2, c$ čia - skaliaras.

Pavyzdžiai.
1. $f(x) = ax, \;\; x \in R$

$\Diamond$ Išties, $f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2)$, $f(cx) = a(cx) = c(ax_1) = cf(x)$.$\blacklozenge$

2. $f(X) = a \bullet X, \;\; X \in R^2, \;\; a \in R^2$, $\bullet$ žymi skaliarinę sandaugą. Kitaip sakant, jei $X = (x_1, x_2), \;\; a = (a_1, a_2), \;\; f(X) = f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$.

$\Diamond$ $f(X_1 + X_2) = f((x_{11} + x_{12}, x_{21} + x_{22}) = a_1(x_{11} + x_{12}) + a_2(x_{21} + x_{22}) = (a_1x_{11} + a_2x_{12}) + (a_1x_{21} + a_2x_{22}) = f(X_1) + f(X_2)$, $f(cX) = (a_1, a_2) \bullet (c(x_1, x_2)) = (a_1, a_2) \bullet (cx_1, cx_2)) = a_1(cx_1) + a_2(cx_2) = c(a_1x_1) + a_2x_2) = cf(X)$. $\blacklozenge$

3. $f(X) = f(x_n - 1, x_2, \cdots \; x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \;\; n \in N$. $\Diamond$ Analogiškai, kaip antrajame pavyzdyje. $\blacklozenge$

Apibrėžimas. *Tiesinių lygčių sistema* vadiname lygčių rinkinį

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m2n}x_n = b_m. \end{cases}$$

Sakome, kad sistema turi m lygčių ir n nežinomųjų x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Kiekvienos sistemos lygties kairioji pusė yra tiesinė trečiojo pavyzdžio funkcija.

Sistemos nežinomųjų reikšmių rinkinį vadinsime *sistemos sprendiniu*, jei jo reikšmės, įstačius jas į sistemos lygčių kairiąsias puses, visas lygtis paverčia tapatybėmis. Sprendinį sutarkime užrašyti tokiu pavidalu:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Pavyzdys.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 + 5x_3 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

Matricą

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

vadiname *sistemos matrica*, matricą-stulpelį $X = (x_1, x_2, \cdots x_n)^T$ – *nežinomųjų vektoriumi*, dešiniųjų sistemos lygčių pusių koeficientų matricą-stulpelį $B = (b_1, b_2 \cdots b_n)^T$ – *dešiniosios sistemos pusės koeficientų vektoriumi.*

Tada sistema ekvivalenti matricinei lygčiai

$$AX = B$$

Pastaba. Šios matricų lygties kairioji pusė pusė $f(X) = AX$ irgi yra tiesinė funkcija.

5.1. Atvirkštinės matricos metodas

Tarkime, sistemos matrica – kvadratinė:

$$A = (a_{ij})_{n\times n}$$

Tarkime, toji matrica neišsigimusi:

$$\det A \neq 0$$

Tuomet taip, kaip sprendžiame įprastą vieno nežinomojo tiesinę lygtį

$$ax = b,\ x = a^{-1}b$$

galime išspręsti ir matricinę lygtį:

$$AX = B,\ X = A^{-1}B$$

Išties, padauginę abi lygties puses iš kairės iš atvirkštinės matricos A^{-1}, gauname:

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X = A^{-1}B$$

Kaip žinome, atvirkštinė matrica yra vienintelė, todėl šiuo atveju ($\det A \neq 0$) sistemos $AX = B$ sprendinys $X = A^{-1}B$ yra vienintelis įmanomas. Sakome, kad sistema *turi vienintelį sprendinį*.

Pavyzdys. Išspręskime atvirkštinės matricos metodu paprastą dviejų nežinomųjų tiesinę sistemą

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

arba

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sistemos matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, nežinomųjų vektorius $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dešiniosios sistemos pusės koeficientų vektorius $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Atvirkštinė sistemos matrica $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, sistemos sprendinys

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Taigi, sistemos sprendinys $(2, 1)$ (t.y., $x = 2$, $y = 1$).

5.2. Kramerio formulės

Apskaičiuokime tiesinių lygčių sistemos, kurios matrica – neišsigimusi, sprendinį, gautą atvirkštinės matricos metodu, išreikštiniu pavidalu: $X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1} b_k \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k2} b_k \\ \cdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kn} b_k \end{pmatrix},$$

t.y.,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1} b_k \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k2} b_k \\ \cdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kn} b_k \end{pmatrix}$$

Vadinasi,

$$x_j = \frac{1}{|A|}(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n)$$

Pažymėkime D_k determinantą, gautą iš sistemos matricos A determinanto $|A| = D$, k-jį jos stulpelį pakeitus laisvųjų narių stulpeliu B:

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} k$$

Tada

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

Šios formulės vadinamos *Kramerio formulėmis.*

Pavyzdys. Išspręskime sistemą

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x - y = 1, \end{cases}$$

naudodami Kramerio formules.

$\Diamond$ Sistemos matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, jos determinantas $D = 1$, determinantai iš Kramerio formulių

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 22,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Vadinasi,

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{2}{1} = 2,\ y = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{1} = 1$$

$\blacklozenge$

5.3. Gauso metodas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m2n}x_n = b_m. \end{cases}$$

Jei prie antrosios lygties abiejų pusių pridėtume pirmosios lygties, padaugintos iš $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$, toje lygtyje nebeliktų nežinomojo x_1, ir pirmosios dvi lygtys atrodytų šitaip:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}^*x_2 + \cdots + a_{2n}^*x_n &= b_2^*. \end{aligned}$$

Suprantamas, kad tie nežinomųjų rinkiniai $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kurie tenkina pradines dvi sistemos lygtis, tenkina ir šias dvi.

Ekvivalenčiomis sistemomis vadinamas sistemas, turinčias tas pačias sprendinių aibes.

Tiesinių lygčių sistemų *elementariaisiais pertvarkiais* vadiname pertvarkius, kuriuos atlikus, gauname ekvivalenčią pradinei sistemą. Išvardinkime elementariuosius sistemos pertvarkius:

1) abiejų lygties pusių dauginimas iš nelygaus nuliui skaičiaus;
2) lygties keitimas kita lygtimi, gauta sudėjus tos bei kurios nors kitos lygties kairiąsias ir dešiniąsias puses;
3) dviejų lygčių keitimas vietomis sistemoje.

Atlikę eilę elementariųjų sistemos pertvarkių ne tik su antrąja, bet ir su kitomis sistemos lygtymis, gautume ekvivalenčią pradinei šitokią sistemą:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n &= b_r, \\
0 &= b_{r+1}, \\
&\cdots \\
0 &= b_m.
\end{aligned}$$

Tokia sistema vadinama *trapecine sistema*.

Kai $r = m = n$, trapecinės sistema pavirsta *trikampe sistema*:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cdots\cdots + a_{1r}x_r &= b_1, \\
a_{22}x_2 + a_{13}x_3 \cdots\cdots + a_{2r}x_r &= b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
a_{r-1,r-1}x_{r-1} + a_{r-1,r}x_r &= b_{r-1}, \\
a_{rr}x_r &= b_r.
\end{aligned}$$

Tarkime, kad $a_{rr} \neq 0$. Tada iš paskutiniosios šios sistemos lygties gauname $x_r = \dfrac{b_r}{a_{rr}}$. Įstatę rastąją x_r reikšmę į priešpaskutinę lygtį, jei $a_{r-1,r-1}x_{r-1} \neq 0$, iš tos lygties randame x_{r-1}, ir taip toliau.

Akivaizdu, kad, kai $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, ..., r$, sistemą išsprendžiame ir gauname vienintelį sprendinį.

Jei trapecinėje sistemoje bent vienas iš koeficientų b_{r+1}, b_{r+2}, $\cdots$, b_m nelygus nuliui, sistema neturi sprendinių. Tokia sistema vadinama *nesuderinta*.

Tarkime, kad $b_{r+1} = b_{r+2} = \ldots = b_m = 0$. Tokia sistema, kai $r < n$, turi be galo daug sprendinių.

Gauso metodo esmė – elementariais pertvarkiais sistemą pakeisti ekvivalenčia, užrašyta trapeciniu pavidalu.

Tiesinių lygčių sistemos išplėstąja matrica vadinsime sistemos matricą A, papildytą sistemos dešiniųjų pusių stulpeliu B. Ją žymėsime $A|B$.

Nesunku suprasti, kad, vietoj to, kad atlikti elementriuosius sistemos pertvarkius, galima atlikti analogiškus sistemos išplėstosios matricos eilučių pertvarkius, siekian gauti jos trapecinį pavidalą.

Išvardinkime elementariuosius matricos pertvarkius:

1) visų matricos eilutės elementų dauginimas iš nelygaus nuliui skaičiaus;
2) vienos matricos eilutės elementų, padaugintų iš nelygaus nuliui skaičiaus, pridėjimas prie bet kurios kitos matricos eilutės;
3) dviejų matricos eilučių keitimas vietomis.

Pastaba. Vėliau, kai skaičiuosime matricos rangą, tokie pertvarkiai bus galimi ir su matricos stulpeliais, dabar gi - tik su jos eilutėmis, nes jie atitinka elementariuosius lygčių sistemos pertvarkius.

Pirmasis išplėstosios sistemos matricos pertvarkymų etapas - gauti nulinius elementus pirmajame matricos stulpelyje (jei $a_{11} = 0$, sukeičiame vietomis sistemos lygtis, tuo pačiu ir matricos eilutes):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1^* \\ 0 & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* & b_2^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{m2}^* & \cdots & a_{mn}^* & b_m^* \end{pmatrix},$$

čia $a^*_{kj} = a_{kj} - a_{1j}a_{k1}a_{11}^{-1},\ k = 2, \ldots, m,\ j = 2, \ldots, n.$
Gauso metodo antrajame etape nagrinėjame matricą

$$\begin{pmatrix} a^*_{22} & \cdots & a^*_{2n} & b^*_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^*_{m2} & \cdots & a^*_{mn} & b^*_m \end{pmatrix},$$

kurioje yra viena eilute mažiau. Taip po m žingsnių gausime trapecinę matricą:

$$A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a^*_{22} & \cdots & a^*_{2r} & \cdots & a^*_{2n} & b^*_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a^*_{rr} & \cdots & a^*_{rn} & b^*_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b^*_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b^*_m \end{pmatrix}$$

Iš šios matricos lengvai gauname aukščiau minėtąją trapecinę sistemą, ir atvirkščiai.

Tiesinių lygčių sistemas suklasifikuokime:

sistema **suderinta,** turi sprendinių		sistema **nesuderinta,** neturi sprendinių
sistema **apibrėžta,** turi vienintelį sprendinį	sistema **neapibrėžta,** turi be galo daug sprendinių	

5.4. Matricos rangas

Prisiminkime, kad $m \times n$ matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

r-osios eilės minoru vadinome $r \times r$ determinantą, sudarytą iš matricos elementų, esančių pasirinktųjų r eilučių $i_1, i_2, \cdots, i_r$ ir r stulpelių $j_1, j_2, \cdots, j_r$ sankirtoje:

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix},$$

$r \leqslant \min\{m, n\}$.

Apibrėžimas. Didžiausio nelygaus nuliui minoro M_r eilė r vadinama *matricos rangu*:

$$rangA = \max_{M_r \neq 0} r.$$

Pavyzdžiai

1. Matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ turi vieną nelygų nuliui antros eilės minorą, o visi trečiosios eilės minorai lygūs nuliui. Todėl $rangA = 2$.

2. Matricos $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ eilutės proporcingos, todėl ne tik trečiosios eilės minoras (pati matrica), bet ir visi antrosios eilės minorai lygūs nuliui. Tuo tarpu visi pirmosios eilės minorai (matricos elementai) nelygūs nuliui. Todėl $rangB = 1$.

Apibrėžimas. Matricos A ir B, gaunamos viena iš kitos elementariaisiais pertvarkiais, yra vadinamos *ekvivalenčiosiomis*: $A \sim B$.

Teorema. Ekvivalenčiųjų matricų rangai yra lygūs.
$\Diamond$ Teoremos teiginio įrodymas sekas iš to, kad kvadratinės matri-

cos elementarieji pertvarkiai nelygų nuliui jos determinantą palieka nelygiu nuliui, o lygų nuliui – lygiu nuliui.♦

Skirtingai negu sprendžiant tiesinių lygčių sistemas Gauso ir Gauso-Žordano metodais, apskaičiuojant matricos rangą elementariuosius matricų pervarkius galima atlikti ne tik su matricos eilutėmis, bet ir su stulpeliais - nes transponuojant matricą jos determinantas nekinta.

Teorema. Bet kuri rango r matrica A yra ekvivalenti r-osios eilės vienetinei matricai E_r.
$\Diamond$ $rangE_r = r$, nes $|E_r| = r$, vadinasi, $A \sim E_r$.♦ Kadangi sukeitus vienetinės matricos stulpelius arba eilutes vietomis, jos determinantras tik keičia ženklą, galime pasirinkti tokį matricos matricos rango skaičiavimo būdą: elementariaisiais matricos pertvarkiais visus įmanomus matricos elementus paverčiame nuliniais, nenulinius – vienetais, matricos rangas lygus tų vienetų skaičiui.

Pavyzdys

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.5. Gauso-Žordano metodas

Trapecinę matricą A_T elementariaisiais matricos pertvarkiais nesunku pertvarkyti į dar patogesnį pavidalą:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & 0 & a'_{1r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & 0 & a'_{2r+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{rr+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^*_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^*_m \end{pmatrix}$$

Tokį gausime r-ąją eilutę pridėdami prie aukštesniųjų, prieš tai padauginę iš tinkamo daugiklio, siekdami, kad nežinomojo x_r koeficientai virstų nuliais, o po to ir pačia r-ąją eilutę padauginę iš ${a^*_{rr}}^{-1}$. Po to analogiškai $r+1$-sios eilutės pagalba pertvarkome virš jos esančias eilutes. Po $r-1$ etapų gauname tokį sistemos išplėstosios matricos pavidalą:

$$A'_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2r+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{rr+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{pmatrix}$$

Kairiajame viršutiniame matricos kampe matome $r \times r$ vienetinę matricą. Tarkime, kad $b'_k = 0,\ k = r+1, \cdots, m$, tada tiesinių lygčių sistema suderinta. Šios matricos r-ąją eilutę atitinka tokia lygtis:

$$x_r + a'_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a'_{rn}x_n = b'_r$$

Iš čia

$$x_r = b'_r - a'_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{rn}x_n$$

Iš aukštesniųjų matricos eilučių ir jas atitinkančių lygčių vienareikšmiškai randame kitus nežinomuosius:

$$x_k = b'_k - a'_{kr+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{kn}x_n,\ k < r$$

Nežinomieji $x_{r+1}, \cdots, x_n$ vadinami *laisvaisiais sistemos kintamaisiais* – kokios jų reikšmės bebūtų, $(x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n)$, kur vietoj $x_1, \cdots, x_r$ įrašytos rastosios jų išraiškos laisvaisiais kintamaisiais $x_{r+1}, \cdots, x_n$, yra tiesinių lygčių sistemos sprendiniai.

5.6. Bendrasis tiesinių lygčių sistemos sprendinys

Tarkime, kad tiesinių lygčių sistema turi m lygčių ir n nežinomųjų

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

jos išplėstoji matrica yra

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

A - sistemos matrica, B - dešiniosios sistemos pusės narių stulpelis.

Kronekerio-Kapelio teorema. Tiesinių lygčių sistema yra suderinta (turi sprendinių) tada ir tik tada, kai rang $A =$ rang $(A|B)$. Sistema yra apibrėžta, kai rang $A = n$.
$\Diamond$ Teoremos teiginio teisingumą galime stebėti spręsdami sistemą Gauso-Žordano metodu. $\blacklozenge$

Apibrėžimas. Bendruoju sistemos sprendiniu vadiname išraišką, apjungiančią visus sistemos sprendinius.

Tarkime, kad tiesinių lygčių sistema suderinta, $rangA = rang(A|B) = r$. Vadinasi, yra r-osios eilės matricos A minoras $M_r \neq 0$. Šį minorą vadinkime *baziniu*). Tarkime, kad jis yra kairiajame vir6utiniame matricos A kampe. Tai visada galime pasiekti keisdami keisdami lygtis vietomis bei kintamųjų x_1, x_2, $\cdots$, x_n indeksus. Jei $r < m$, sistemoje yra lygčių, kurios gali būti pašalintos elementariais pertvarkiais (sprendžiant sistemą Gauso metodu, jas atitinka nulinės eilutės). Todėl sistemoje paliekame r lygčių. Jei $n = r$, sistemos matrica yra kvadratinė ir $\det A \neq 0$. Tokia sistema turi vienintelį sprendinį, kurį galima rasti Kramerio metodu.

Išnagrinėkime atvejį, kai $n > r$, ir perrašykime sistemą taip:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r & = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r & = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{r2n}x_r & = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Kintamieji x_{r+1}, x_{r+2}, $\cdots$, x_n yra *laisvieji*, o kintamuosius x_1, x_2, $\cdots$, x_r vadinsime *baziniais*. Tokiu b8du, bazinių kintamųjų yra $r = \operatorname{rang} A$, o laisvųjų kintamųjų $n - r$. Pažymėkime $c_j = b_j - \sum\limits_{k=r+1}^{n} a_{jk}x_k$. Kadangi $M_r \neq 0$, gautąją sistemą galime išspęsti Kramerio formulėmis

$$x_j = \frac{1}{M_r} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_1 & \cdots & a_{ir} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & c_r & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}, \ j = 1, 2, \ldots, r.$$

Skleisdami šiuos determinantus j-ojo stulpelio elementais, gauname *bendrojo sprendinio* formules:

$$x_j = d_j^0 + \gamma_j^{r+1}x_{r+1} + \cdots + d_j^n x_n, \ j = 1, 2, \ldots, r,$$

čia d_j^i, $i = r+1, r+2, \ldots, n$ – priklauso tik nuo koeficientų a_{ij}, o d_j^0 – dar ir nuo b_1, b_2, $\cdots$, b_r. Kai laisvieji kintamieji x_{r+1}, $\cdots$, x_n įgyja konkrečias reikšmes, gauname sistemos *atskirąjį sprendinį*. Taigi kai bent vienas koeficientas $d_j^i \neq 0$, sistema turi be galo daug sprendinių.

Pavyzdys

$$\begin{cases} x+y+z-w=2, \\ x-y-z+w=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2-z+w, \\ x-y=z-w. \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2-z+w & 1 \\ z-w & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=1,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-z+w \\ 1 & z-w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=1-z+w.$$

Bendrasis sprendinys $(x,y,z,w)=(1,1-z+w,z,w)$. Pasirinkę laisvųjų kintamųjų reikšmes $z=1$, $y=2$, gauname vieną *atskirąjį sprendinį* $(1,2,1,2)$.

Sistemą, kurios visų lygčių dešiniosios pusės lygios nuliui, vadiname *homogenine lygčių sistema*.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

Homogeninė sistema visada yra suderintoji – turi nulinį sprendinį, kuris dar vadinamas *trivialiuoju sprendiniu*.
Jei $rangA=r$, bendrasis sprendinys
$x_j=c_j^{r+1}x_{r+1}+c_j^{r+2}x_{r+2}+\cdots+c_j^n$, $j=1,2,\dots,r$.

Fundamentalioji sprendinių sistema

$$\begin{pmatrix} c_1^{r+1} \\ c_2^{r+1} \\ 0 \\ \cdots \\ c_r^{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1^{r+2} \\ c_2^{r+2} \\ 0 \\ \cdots \\ c_r^{r+2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1^{r+3} \\ c_2^{r+3} \\ 0 \\ \cdots \\ c_r^{r+3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} c_1^{n-1} \\ c_2^{n-1} \\ 0 \\ \cdots \\ c_r^{n-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1^{n} \\ c_2^{n} \\ 0 \\ \cdots \\ c_r^{n} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pažymėję šiuos atskiruosius sprendinius $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{n-r}$, bet kurį homogeninės sistemos sprendinį galime užrašyti taip:

$$(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_{n-r}X_{n-r},$$

čia C_j – bet kokie skaliarai.

Homogeninė sistema turi vienintelį nulinį sprendinį tada ir tik tada, kai $\operatorname{rang} A = n$.

Bendrojo sprendinio struktūra

Nehomogeninės lygties bendrasis sprendinys	=	*Homogeninės lygties bendrasis sprendinys*	+	*Nehomogeninės lygties atskirasis sprendinys*

Literatūra

1. K. Bulota, P. Survila. Algebra ir skaičių teorija. 1. Vilnius: Mokslas, 1989. 412 p.

2. K. Bulota, P. Survila. Algebra ir skaičių teorija. 2. Vilnius: Mokslas, 1990. 416 p.

3. P. Katilius. Analizinė geometrija. Vilnius: Mintis, 1973. 564 p.

4. A. Matuliauskas. Algebra. Vilnius: Mokslas, 1985. 384 p.

5. V. Pekarskas, A. Pekarskienė. Tiesinės algebros ir analitinės geometrijos elementai. Kaunas: Technologija, 2004. 388 p.

6. A. Krylovas, E. Paliokas. Algebra ir geometrija pasitelkiant Maple. Teorijos santrauka ir laboratoriniai darbai. Pirmoji dalis. Vilnius: Technika, 2006. 146 p.